Coloração Total de Grafos Split

Rafael Porto[a,b], Sheila Morais de Almeida[a]

[a] *Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Departamento Acadêmico de Informática, R. Doutor Washington Subtil Chueire, 330, Ponta Grossa, PR, Brasil*
[b] *Autor para correspondência: rafael.1997@alunos.utfpr.edu.br*

Palavras-chaves: coloração total, grafos split, número cromático total

Seja $G = (V(G), E(G))$ um grafo com conjunto de *vértices* $V(G)$ e conjunto de arestas $E(G)$. Os vértices e arestas de G são chamados de elementos de G. Diz-se que uma aresta $(u, v) \in E(G)$ *incide* nos vértices u e v, e que u e v são vértices *adjacentes*. Uma *coloração de arestas* é uma atribuição de cores para as arestas de G e uma *coloração total* é uma atribuição de cores para os elementos de G. A coloração é *própria* quando elementos adjacentes ou incidentes possuem cores distintas. Neste projeto, considera-se apenas colorações próprias e o termo "própria" será omitido. O *Problema da Coloração Total* é determinar o *número cromático total*, $\chi''(G)$, que é o menor número de cores para uma coloração total de G. Similarmente, o *Problema da Coloração de Arestas* é determinar $\chi'(G)$, o menor número de cores para uma coloração de arestas de G.

O *grau máximo* de G, denotado por $\Delta(G)$, é o maior número de arestas que incidem em algum vértice de G. Dado um grafo G e um inteito k, decidir $\chi''(G) \leq k$ é um problema $\mathcal{NP}$-completo (A. Sánchez-Arroyo, *Determining the total colouring number is $\mathcal{NP}$-hard*, 1989) e permanece $\mathcal{NP}$-completo mesmo quando restrito a grafos bipartidos k-regulares com $k \geq 3$ (McDiarmid e Sánchez-Arroyo, *Total colouring regular bipartite graphs is $\mathcal{NP}$-hard*, 1994). Entretanto, existe algoritmo polinomial para o Problema da Coloração Total quando restrito aos grafos com vértice universal (Hilton, *A Total-chromatic number analogue of Platholt's Theorem*, 1989). Além disso, quando o grau máximo é par, há algoritmos polinomiais para determinar o número cromático total de grafos split (Chen et al. *Total chromatic number and chromatic index of split graphs*, 1995) e de grafos de intervalos (Figueiredo et al. *Total-Chromatic Number and Chromatic Index of Dually Chordal Graphs*). Os mesmos trabalhos apresentam algoritmos polinomiais para solução do Problema da Coloração de Arestas respectivamente em grafos split e grafos de intervalos que tenham grau máximo ímpar.

Um grafo G é *split* quando $V(G)$ pode ser particionado em um conjunto de vértices dois a dois adjacentes e um conjunto de vértices dois a dois não-adjacentes. Recentemente avanços significativos ocorreram sobre o Problema da Coloração de Arestas de grafos split com grau máximo par (C.I. Cararo, *Coloração de arestas de grafos split com grau máximo par*, 2023). Neste projeto, busca-se estudar essas soluções com o intuito de adaptá-las para o Problema da Coloração Total dos grafos split com grau máximo ímpar.